Krótki wstęp do zastosowania Metody Elementów Skończonych (MES)
do numerycznych obliczeń inżynierskich

Większość inżynierów, mając możliwość wyboru pomiędzy rozwiązaniem jednego złożonego problemu lub kilkudziesięciu trywialnych, wybierze drugą opcję. I słusznie. W niniejszym artykule przedstawiono pokrótce jedną z metod obliczeń, gdzie jednym z założeń jest tranformacja układu fizycznie złożonego w wiele układów uproszczonych, a następnie poszukiwanie rozwiązania dla złożonego układu całościowego poprzez sekwencyjne rozwiązywanie zadania w uproszczonych układach składowych.

1. Rozwój MES

Metoda Elementów Skończonych (ang. FEA – Finite Element Analysis) jest w dniu dzisiejszym jedną z podstawowych metod prowadzenia komputerowo wspomaganych obliczeń inżynierskich (ang. CAE – Computer Aided Engineering). W większości dużych i średnich przedsiębiorstw rozpoczęcie wytwarzania danego produktu nie może się rozpocząć, zanim jego określone własności nie zostaną pozytywnie zweryfikowane z zastosowaniem obliczeń MES.

To co dziś wydaje się standardem, „całkiem niedawno” było luksusem osiągalnym jedynie dla największych koncernów przemysłowych (np. Boeing, USA) lub ośrodków naukowych (MIT, USA). Efektem dynamicznego rozwoju komputerów osobistych PC, który rozpoczął się w połowie lat osiemdziesiątych XX w. było spopularyzowanie numerycznych metod i narzędzi obliczeniowych wśród dużych, średnich i nawet małych przedsiębiorstw przemysłowych. Teoretyczne podstawy MES zostały dość dokładnie sformułowane pod koniec lat 50-tych XX w. (jako metody prowadzenia obliczeń z zakresu mechaniki strukturalnej), choć prowadzenie rozważań z nią związanych miało miejsce już w XIX wieku. W jednej z prac Kirscha (1868) zasugerowano zastąpienie trójwymiarowego ustroju ciągłego zbiorem oddzielnych elementów prostopadłościennych, a następnie zastąpienie każdego z nich przestrzenną kratownicą. W ten sposób powstała idea utworzenie metody obliczeniowej, której głównym założeniem był podział analizowanego obiektu (o złożonym kształcie i nieskończonej liczbie stopni swobody) przez ściśle określoną liczbę elementów w kształcie prymitywów geometrycznych o skończonej liczbie stopni swobody. Podział kontinuum na skończoną liczbę fragmentów nazwano dyskretyzacją obiektu.

Gwałtowny renesans ww. idei nastąpił po II wojnie światowej w wyniku wyścigu zbrojeń, czego efektem było m.in. pojawienie się pierwszych maszyn cyfrowych. W 1957 opublikowano pracę, w której pewien skończony fragment ustroju ciągłego nazwano **elementem skończonym**, a także zaproponowano metodę rachunku wariacyjnego (zasada minimum energii potencjalnej) jako sposób rozwiązania wybranych problemów mechaniki. Jej autorami byli Turner, Clough, Martin i Topp, a ich pracę z czasem nazwano „**aktem urodzenia Metody Elementów Skończonych**”. Zaproponowane metody prowadziły jednak do utworzenia równań równowagi układu o znacznej liczbie niewiadomych, a równań tych nie były w stanie rozwiązać ówczesne komputery.

Z problemem tym uporali się... polscy Uczeni.W latach 60-tych XX w. opublikowano prace **Prof. Zienkiewicza** oraz Prof. Przemienieckiego, w których przedstawiono metody praktycznego zastosowania MES wraz ze sposobami uniknięcia wybranych trudności natury matematycznej. **Do dnia dzisiejszego, w światowej literaturze poświęconej CAE, Prof. Zienkiewicza uważa się za „ojca Metody Elementów Skończonych” oraz jej praktycznego zastosowania do rozwiązania problemów mechaniki**.

Problemy natury matematycznej to nie wszystkie problemy, z którymi musieli borykać się ówcześni inżynierowie i naukowcy – jednym z większych problemów obliczeń MES w latach 60-tych były moce obliczeniowe ówczesnych maszyn cyfrowych oraz utworzenie programów liczących z zastosowaniem FEA. Podczas gdy w amerykańskiej NASA tworzono zalążki systemu MES znanego dziś pod nazwą NASTRAN, w Polsce już doskonale funkcjonował jeden pierwszych na świecie komputerowych systemów obliczeniowych MES, noszący nazwę **WAT-KM**. Został on stworzony przez polskich naukowców z **Wojskowej Akademii Technicznej w Warszawie** pod kierownictwem **Prof. Szmeltera**. Ów wielki uczony wychował wielu następców, którzy zajmują się dalszym rozwojem MES na poziomie światowym. Do wychowanków Prof. Szmeltera należą takie sławie polskiej i światowej Nauki, jak: Prof. Kleiber, Prof. Dacko oraz Prof. Niezgoda, którzy nadal rozwijają teorię zastosowania elementów skończonych.

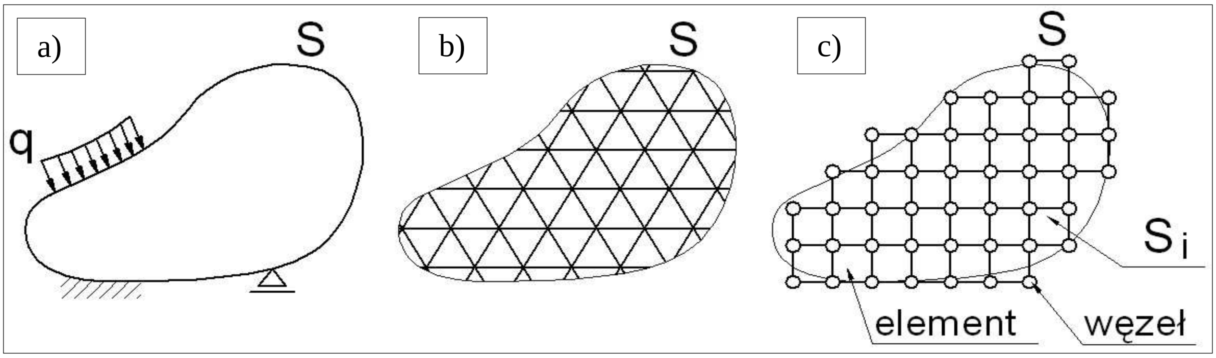
Pod koniec lat 80-tych pojawiło się wiele profesjonalnych systemów MES, przeznaczonych do instalacji na PC, np. NASTRAN. Fakt ten umożliwił dużym i średnim firmom wprowadzenie weryfikacyjnych obliczeń CAE do procesu rozwoju produktu. Finałem ewolucji (lata 90-te) było zintegrowanie systemów CAD oraz CAE w spójną całość, umożliwiająca dwustronną wymianę danych, np. UNIGRAPHICS. Od tego czasu nawet niewielkie przedsiębiorstwa i uczelnie mogą sobie pozwolić na korzystanie z zalet MES.

2. Idea MES

Metoda Elementów Skończonych jest jedną z metod dyskretyzacji układów geometrycznych ciągłych, tj. podziału kontinuum na skończoną liczbę podobszarów. Wobec powyższego, idea metody zakłada modelowanie nawet bardzo złożonych konstrukcji (części i zespołów) poprzez ich reprezentację za pomocą możliwie prostych geometrycznie elementów składowych, nawet z uwzględnieniem nieciągłości i wielofazowości materiałowych.

Główne założenie MES to podział modelu geometrycznego ciągłego (Rys. 1) na elementy skończone, łączące się w tzw. węzłach, czego efektem jest utworzenie modelu geometrycznego dyskretnego. Raz jeszcze należy podkreślić, iż efektem dyskretyzacji jest transformacja układu o nieskończonej liczbie stopni swobody (zdolności do zmiany wartości określonej współrzędnej) do postaci układu o skończonej liczbie stopni swobody (SSW). Należy zauważyć, że: $S = \sum_{1}^{n} Si$, gdzie $n \rightarrow +\infty$

lecz osiągnięcie warunku $n \rightarrow +\infty$ jest trudne do zrealizowania ze względów praktycznych.



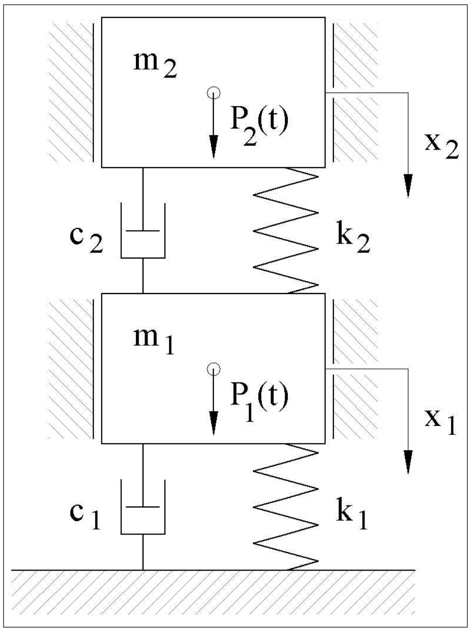
Rys. 1. Dyskretyzacja modelu ciągłego – transformacja w zbiór (siatkę) elementów skończonych: a) model geometryczny ciągły, b) model dyskretny idealny, c) model dyskretny obliczeniowy

Podczas obliczeń z zastosowaniem MES dyskretyzacji ulegają również wszelkie inne wielkości fizyczne, reprezentowane w układzie za pomocą funkcji ciągłych (np. obciążenia, utwierdzenia, przemieszczenia, naprężenia). Podczas dyskretyzacji określonej wielkości fizycznej dąży się do maksymalnego zbliżenia jej postaci dyskretnej i ciągłej z zastosowaniem metod aproksymujących.

Aby rozwiązać poszczególne zagadnienie mechaniki (np. z dziedziny wytrzymałości materiałów) należy zwrócić uwagę na fizyczne otoczenie układu, tj. w przypadku układu przedstawionego na Rys. 1a: wymuszenie (obciążenie ciągłe *q*) oraz utwierdzenie (stałe ciągłe wraz z podporą przesuwą).

Wymuszenie oraz utwierdzenie noszą umowne określenie warunków brzegowych układu.

Chcąc doprowadzić do uzyskania żądanych wyników z zastosowaniem MES należy zbudować tzw. macierze sztywności, początkowo macierze lokalne (na podstawie wartości współrzędnych węzłów oraz wartości parametrów fizycznych elementów), a następnie tzw. macierz globalną. Aby przybliżyć pojęcie macierzy sztywności należy zwrócić uwagę na układ o 2 SSW, przedstawiony na Rys. 2, gdzie dwie masy (ozn. m_1 oraz m_2) wykonują ruch drgający względem współrzędnej x, w wyniku obciążenia ich siłami zmiennymi w czasie – odpowiednio: P_1 i P_2. Masy połączono ze sobą oraz z otoczeniem za pomocą elementów sprężysto–tłumiących, z których każdy posiada określoną sztywność k oraz zdolność tłumienia c. Szukanymi wielkościami są wartości poszczególnych przemieszczeń x(t).



Rys. 2. Przykładowy układ mechaniczny o 2SS

Równania ruchu ogólnego układu o 2SSW formułuje się z zastosowaniem równania Lagrange’a drugiego rodzaju, pochodzące pośrednio od II prawa dynamiki Newton’a:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}}\right)+\frac{\partial E_d}{\partial \dot{x}}+\frac{\partial E_p}{\partial x}=P(t) \qquad \mathrm{N} \qquad (1)$$

gdzie: E_k – energia kinetyczna układu,

E_d – energia tłumienia (dyssypacji) układu,

E_p – energia potencjalna układu.

Dla układu o jednym stopniu swobody (1SSW):

$$E_k=\frac{m\dot{x}^2}{2} \qquad \mathrm{J} \qquad (2)$$

$$E_d=\frac{c\dot{x}^2}{2} \qquad \mathrm{J\cdot s^{-1}} \qquad (3)$$

$$E_p=\frac{kx^2}{2} \qquad \mathrm{J} \qquad (4)$$

Dla układu o 2SSW (Rys. 2):

$$E_k=E_{k1}+E_{k2} \qquad \mathrm{J} \qquad (5)$$

$$E_d=E_{d1}+E_{d2} \qquad \mathrm{J\cdot s^{-1}} \qquad (6)$$

$$E_p = E_{p1} + E_{p2} \quad \mathrm{J} \tag{7}$$

$$E_k = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} \quad \mathrm{J} \tag{8}$$

$$E_d = \frac{c_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2}{2} \quad \mathrm{J \cdot s^{-1}} \tag{9}$$

$$E_p = \frac{k_1 x_1^2}{2} + \frac{k_2 (x_2 - x_1)^2}{2} \quad \mathrm{J} \tag{10}$$

Na podstawie zależności (1) oraz (8)÷(10) tworzy się układ dwóch różniczkowych równań ruchu, z których każde dotyczy wybranego układu:

$$\begin{cases} \text{układ 1:} \quad m_1 \ddot{x}_1 + [(c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2] + [(k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2] = P_1(t) \quad \mathrm{N} & (11) \\ \text{układ 2:} \quad m_2 \ddot{x}_2 + [(-c_2)\dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2] + [(-k_2)x_1 + k_2 x_2] = P_2(t) \quad \mathrm{N} & (12) \end{cases}$$

Układ równań (11), (12) można wyrazić jednym równaniem macierzowym:

$$\boxed{\begin{vmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{vmatrix}} \tag{13}$$

które ogólnie zapisać można, jako:

$$\boxed{M \cdot \ddot{x} + C \cdot \dot{x} + K \cdot x = P(t)} \tag{14}$$

gdzie: M - macierz bezwładności,
C - macierz tłumienia,
K - macierz sztywności,
$P(t)$ - wektor sił uogólnionych,
$\ddot{x}$ - wektor przyspieszeń uogólnionych,
$\dot{x}$ - wektor prędkości uogólnionych,
x - wektor przemieszczeń uogólnionych.

Wyrażenie (14) jest ogólnym rozwiązaniem równania ruchu układu o 2SSW. Opracowanie równań analogicznych jest niezbędne do uruchomienia obliczeń MES. Oczywiście ze względu na fakt, iż w większości przypadków zadanie FEA rozwiązuje stacja obliczeniowa, zadanie to należy do „elektronicznego mózgu”.

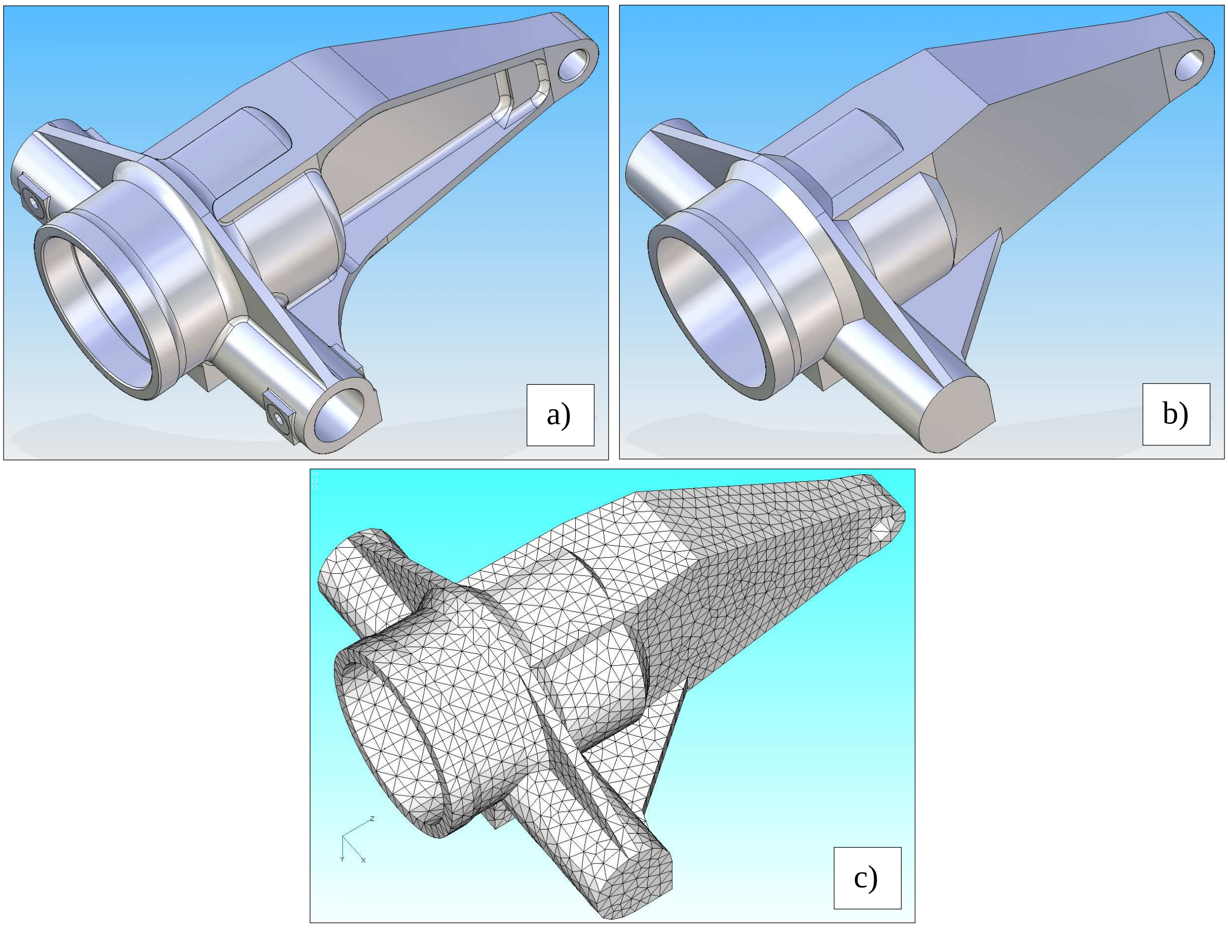
Chcąc rozwiązać dane zadanie mechaniki (znaleźć wartości niewiadomych) np. przemieszczeń) należy rozwiązać zbudowane uprzednio układy równań.

3. MES w praktyce

Współczesne aplikacje inżynierskie CAE, w których stosuje się MES składają się z trzech wzajemnie współpracujących modułów, którymi są:

a) preprocesor (służy m.in. do importu lub przygotowania geometrii, doboru rodzaju elementów skończonych, dyskretyzacji kontinuum, a także przyłożenia warunków brzegowych),
b) solver (moduł przeznaczony do budowy oraz rozwiązania układu równań, na podstawie którego uzyskuje się poszukiwane wartości danych wielkości fizycznych),
c) postprocesor (moduł służący do prezentacji oraz wspomagania interpretacji uzyskanych wyników).

Z praktycznego punktu widzenia, przed dyskretyzacją modelu CAD należy go poddać odpowiedniemu uproszczeniu, podczas którego należy usunąć elementy nieistotne z punktu widzenia analizowanego zjawiska np. promienie, fazy, otwory, pochylenia, itd. Na Rys. 2 zaprezentowano sposób prowadzenia wyżej opisanych działań na przykładzie modelu CAD tulei górnej cylindra amortyzatora podwozia samolotu.



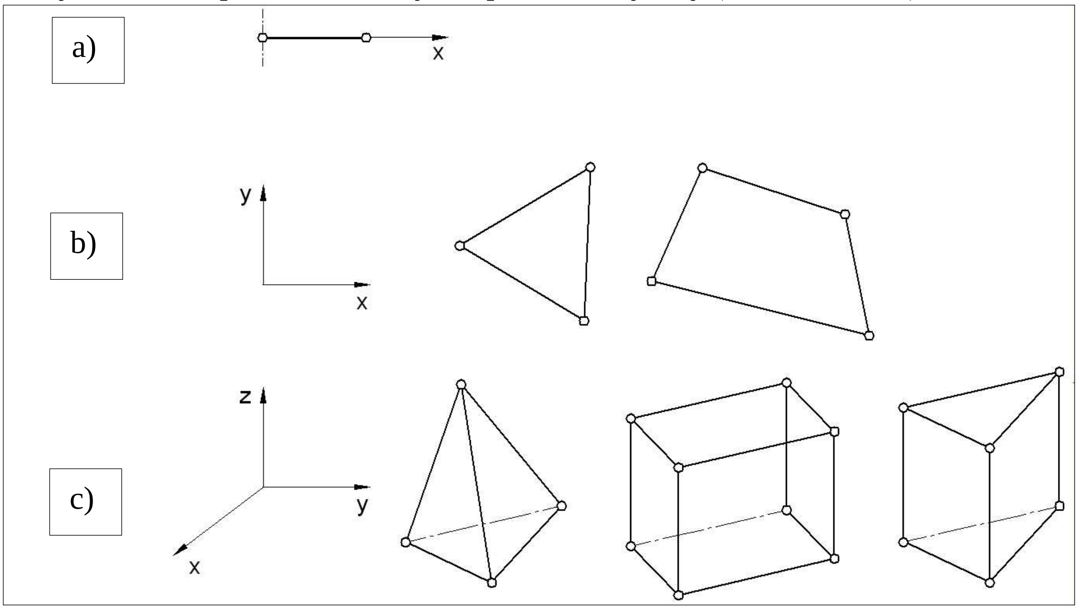
Rys. 3. Sposób postępowania podczas przygotowania geometrii CAD do obliczeń MES: a) zbudowanie dokładnego modelu CAD, b) uproszczenie geometrii modelu CAD, c) dyskretyzacja modelu uproszczonego

Geometria analizowanych układów może różnić się od siebie w sposób znaczący. Mogą to być obiekty 1-wymiarowe (belki), 2-wymiarowe (cienkie tarcze, membrany) oraz 3-wymiarowe (bryły). Wobec powyższego, podczas przygotowywania analizy MES dostępnych jest bardzo wiele rodzajów elementów skończonych, a do kryteriów ich podziału zaliczyć można:

- liczbę wymiarów, którymi można opisać element (Rys. 4),
- kształt geometryczny,
- typ i stopień wielomianu założonej funkcji kształtu elementu skończonego,
- liczbę węzłów w elemencie,
- rodzaje więzów ogólnych, nałożonych na element skończony.

Podczas dyskretyzacji modelu przydatne może okazać się zagęszczenie siatki elementów, w obszarach szczególnie obciążonych warunkami brzegowymi. Należy jednakże pamiętać, że tzw. „zagęszczanie siatki w nieskończoność”, tj. doprowadzenie do wygenerowania bardzo małych elementów skończonych w danych rejonach może wręcz implikować zniekształcenie wartości poszukiwanych niewiadomych.

Należy też nadmienić, że podział kontinuum geometrycznego na elementy skończone może odbywać się w sposób manualny lub półautomatyczny (tzw. automesh).

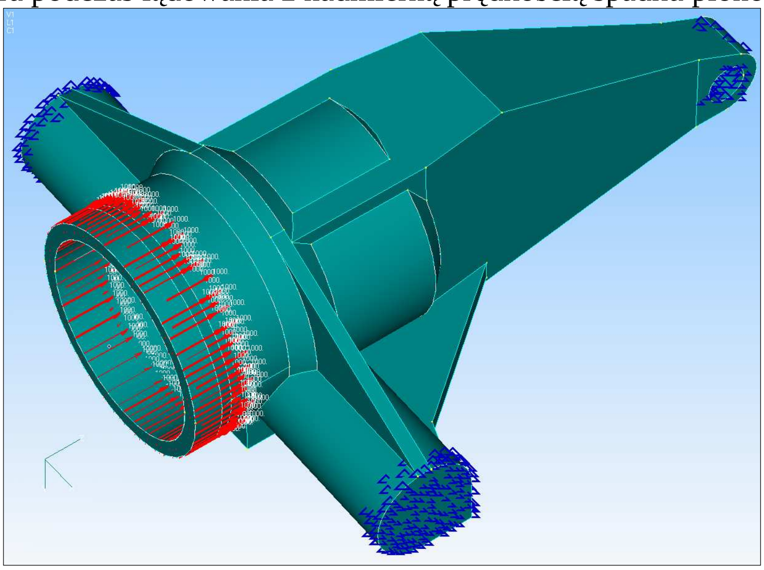


Rys. 4. Schematy ideowe wybranych elementów skończonych: a) 1D, b) 2D, c) 3D.

Niezbędnym krokiem jest również określenie wartości wybranych wielkości fizycznych, przypisanych do elementów skończonych (np. cechy materiałowe E, G, ν, itd.).

Podczas przygotowywania obliczeń MES należy zwrócić uwagę na określenie rodzaju oraz liczby stopni swobody (SSW) w węzłach, a do SSW należeć mogą: przemieszczenie (translacja, rotacja), ciśnienie, temperatura, potencjał magnetyczny i napięcie elektryczne. Na Rys. 5 przedstawiono model tulei cylindra amortyzatora podwozia z przypisanymi warunkami brzegowymi:

- utwierdzenie (na licach walcowych gniazd, w których ustala się sworznie mocujące podwozie do wnęki podwoziowej kadłuba samolotu),
- wymuszenie (obciążenie wynikające z uderzenia tłoczyska amortyzatora o zderzak cylindra podczas lądowania z nadmierną prędkością spadku pionowego).

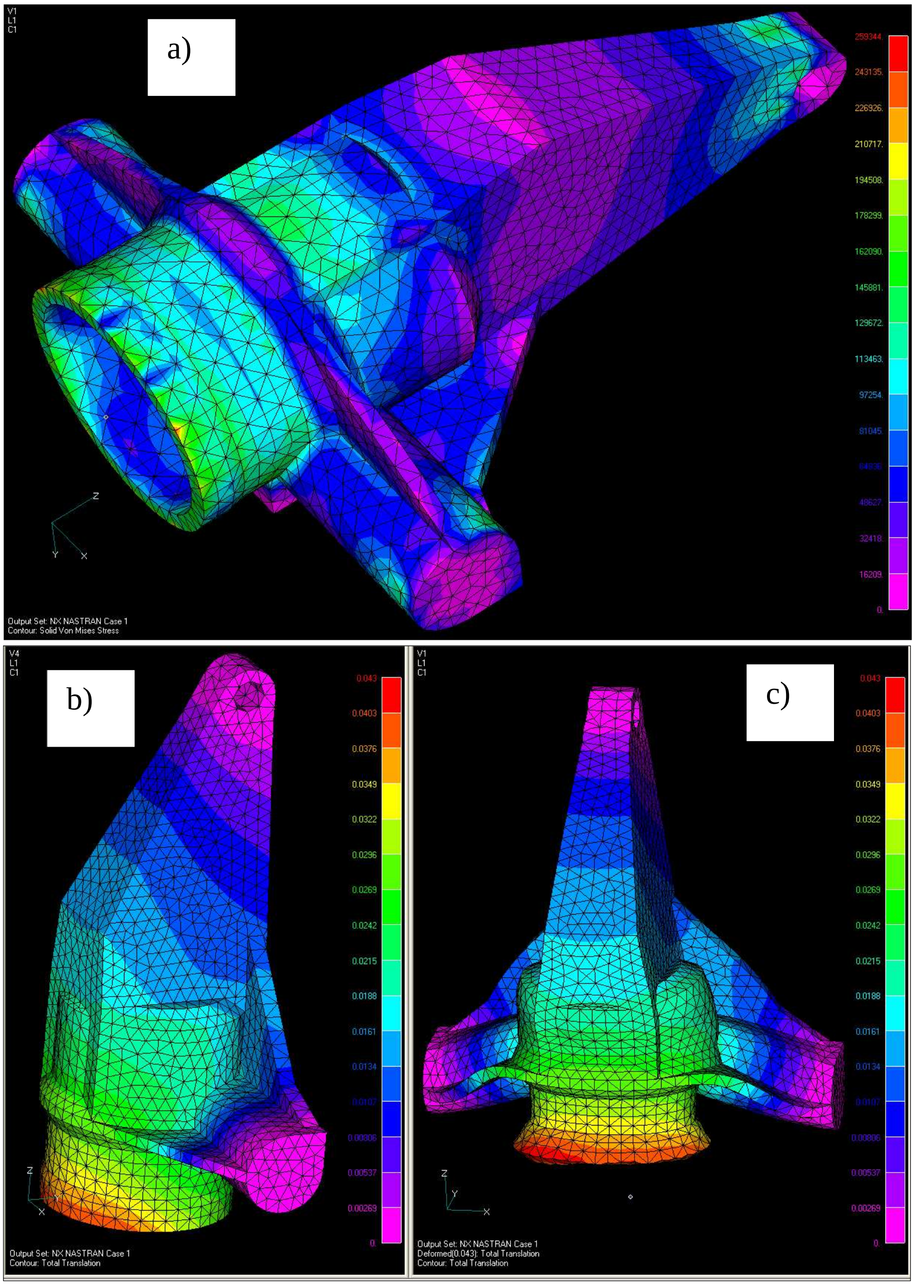


Rys. 5. Warunki brzegowe przypisane do geometrii modelu tulei górnej cylindra amortyzatora

Rozwiązanie danego zadania przez solver odbywa się w większości analiz w sposób „niewidoczny” dla użytkownika.

Podczas analizy wyników za pomocą postprocesora istnieje wiele możliwości zaprezentowania szukanych rezultatów. Na Rys. 6.a przedstawiono tzw. warstwice naprężeń zredukowanych wg hipotezy Hubera – Misesa, które pojawią się w modelu tulei górnej cylindra w wyniku założonych uprzednio warunków brzegowych. Analogiczny model z uwzględnieniem przedstawienia wyników w postaci warstwic przemieszczeń zaprezentowano na Rys. 6.b, natomiast identyczne wyniki wraz z demonstracją odkształcenia obiektu (odpowiednio przeskalowanego) zademonstrowano na Rys. 6.c.

Podczas pracy z postprocesorem kwestia doboru skali barw, liczby wartości pośrednich pomiędzy zarejestrowaną wartością maksymalną, a minimalną, a także dobór jednostki miary jest czynnikiem zależnym od preferencji użytkownika.



Rys. 6. Prezentacja wybranych wyników obliczeń MES: a) warstwice naprężeń, b) warstwice przemieszczeń, c) wartości przemieszczeń na modelu odkształconym (odpowiednio przeskalowanym)

4. Zakończenie

Reasumując należy zauważyć, że zastosowanie Metody Elementów Skończonych we wspomaganych komputerowo analizach inżynierskich umożliwia szybkie i względnie dokładne osiągnięcie wyników, których uzyskanie w sposób analityczny byłby wyjątkowo trudne lub wręcz niemożliwe.

Wykorzystanie MES do zweryfikowania poprawności funkcjonowania danego wyrobu umożliwia krokową lub dokładną optymalizację jego wybranych cech już od wczesnych etapów jego rozwoju produktu. Uzyskuje się więc możliwość radykalnego skrócenia czasu trwania uruchomienia produkcji nowego wyrobu lub modyfikacji wyrobu już znajdującego się w produkcji.

Należy mieć na uwadze, że wyniki analiz MES opisują zachowanie się układu w sposób przybliżony, są zawsze obarczone pewnym błędem, który w przypadku poprawnego prowadzenia analizy CAE można uznać za pomijalnie mały.

Pamiętać też wypada o niepodważalnym wkładzie polskich uczonych w rozwój teorii Metody Elementów Skończonych oraz praktycznych aspektów jej zastosowania w numerycznych obliczeniach inżynierskich.

Adam Budzyński

Literatura:

[1] Dacko M, Borkowski W., Dobrociński S, Niezgoda T., Wieczorek M.: Metoda Elementów Skończonych w mechanice konstrukcji, Arkady, Warszawa 1994

[2] Rakowski G., Kacprzyk Z.: MES w mechanice konstrukcji, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2005

[3] Rusiński E., Czmochowski J., Smolnicki T.: Zaawansowana metoda elementów skończonych w konstrukcjach nośnych, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2000